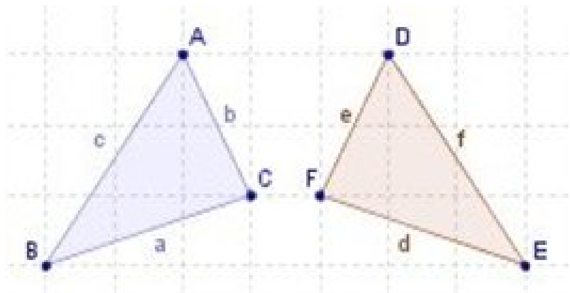
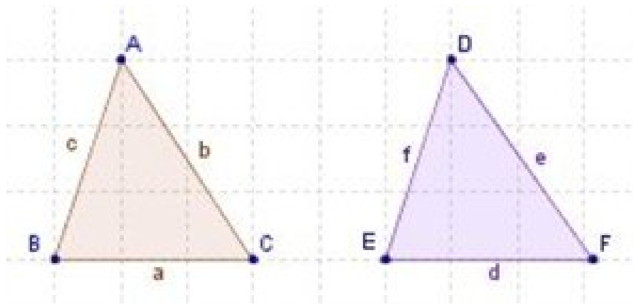
Congruencias de triángulo

En matemáticas, dos figuras de puntos son congruentes si tienen los lados iguales y el mismo tamaño (o también, están relacionados por un movimiento) si existe una isometría que los relaciona: una transformación que es de translaciones, rotaciones y reflexiones. Por así decirlo, dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, aunque suposición u orientación sean distintas. Las partes coincidentes de las figures congruentes se llaman homólogas o correspondientes.

CONGRUENCIAS DE TRIANGULO

Observa los siguientes triángulos:





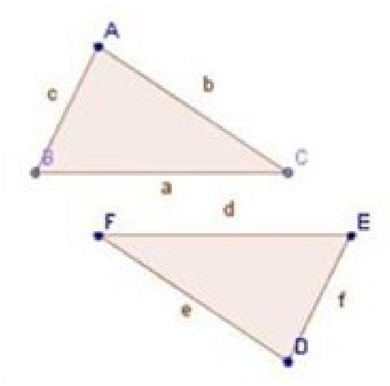
Al mirar los dos pares de triángulos se puede apreciar que en ambos los triángulos tienen entre si la **misma forma** y **tamaño**.

Cuando se cumplen estas dos condiciones se dice que los triángulos son **congruentes;** esta palabra (congruente) se simboliza o representa con el símbolo

$$\cong$$

.

Definición: Se dice que un **? ABC es congruente con otro ? DEF** si sus lados respectivos son iguales y sus ángulos respectivos también lo son.



Para expresar en lenguaje matemático que los dos triángulos de la izquierda son congruentes, se usa la siguiente simbología:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Al observarlos triángulos de la figura puede apreciarse que tienen lados respectivamente congruentes, que son:

$$\overline{AB} \cong \overline{ED}$$
$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$
$$\overline{AC} \cong \overline{DF}$$

También tienen ángulos respectivamente congruentes:

$$\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$$
$$\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$$
$$\sphericalangle C \cong \sphericalangle F$$

Entonces es posible afirmar que

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

.

Al revés: si dos o más triángulos son congruentes, sus lados y ángulos lo serán respectivamente, en el orden de las letras asignadas a sus vértices para nombrarlos, salvo que gráficamente se indique otra correspondencia.

Si, por ejemplo, tenemos**? ABR**

$$\cong$$

? CDS, sus la dos respectivamente congruentes serán:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$
$$\overline{BR} \cong \overline{DS}$$
$$\overline{AR} \cong \overline{CS}$$

Y los ángulos respectivamente congruentes serán:

$$\sphericalangle A \cong \sphericalangle C$$
$$\sphericalangle B \cong \sphericalangle D$$
$$\sphericalangle R \cong \sphericalangle S$$

Criterios de congruencia

Los criterios de congruencia corresponden a los postulados y teoremas que enuncian cuáles son las condiciones mínimas que deben reunir dos o más triángulos para que sean congruentes. Estas son:

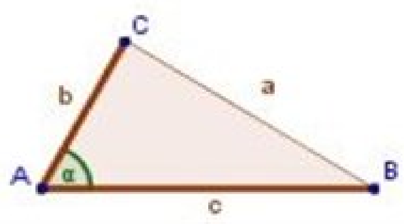
- **Congruencia de sus lados**
- **Congruencia de sus ángulos**

Para que dos triángulos sean congruentes, es suficiente que sólo algunos lados y/o ángulos sean iguales.

LOS CRITERIOS BÁSICOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

PRIMER CRITERIO: Postulado LAL

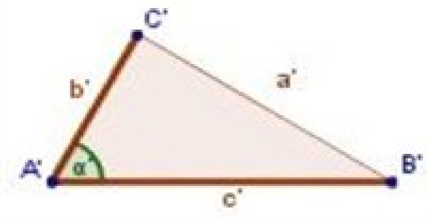
LAL significa **lado – ángulo – lado.** Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo determinado por ellos respectivamente iguales.



$$\overline{AC} = \overline{A'C'}$$

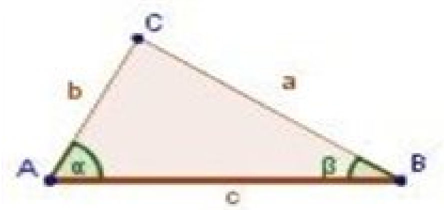
$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$



SEGUNDO CRITERIO: Postulado ALA

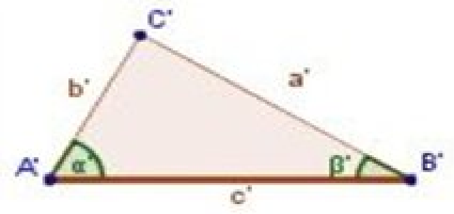
ALA significa **ángulo – lado – ángulo.** Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado común a ellos, respectivamente, iguales.



$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$$

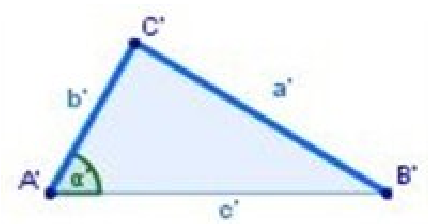
$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

$$\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta'$$

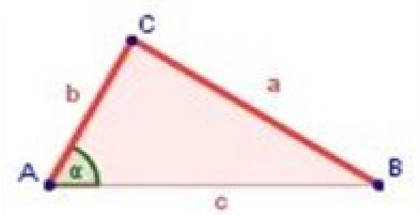


TERCER CRITERIO: Postulado LLA

LLA significa **lado – lado – ángulo.** Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

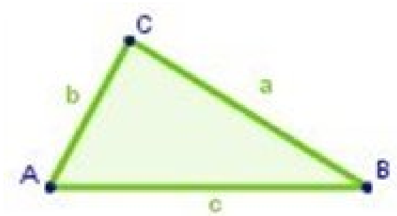


$$\overline{AC} = \overline{A^{I}C^{I}}$$
$$\overline{BC} = \overline{B^{I}C^{I}}$$
$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha^{I}$$

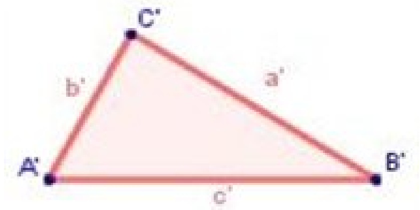


CUARTO CRITERIO: Postulado LLL

LLL significa **lado – lado – lado**. Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente iguales.



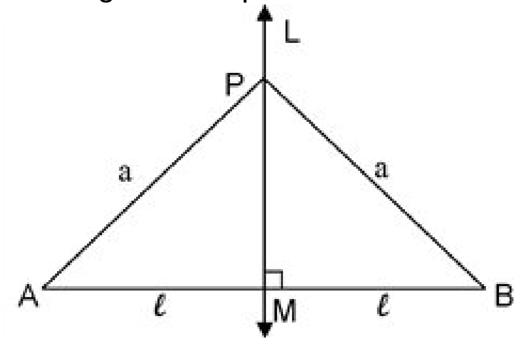
$$\overline{AC} = \overline{A^{I}C^{I}}$$
$$\overline{BC} = \overline{B^{I}C^{I}}$$
$$\overline{AB} = \overline{A^{I}B^{I}}$$



APLICACIÓN DE LAS CONGRUENCIAS DE LOS TRIANGULOS: TEOREMAS

1. **Teorema de la Mediatriz**

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.



DEMOSTRACIÓN

L: mediatriz de $\overline{AB}$ y $\forall\ P \in L$

$\Rightarrow$ PDQ $AP = PB$

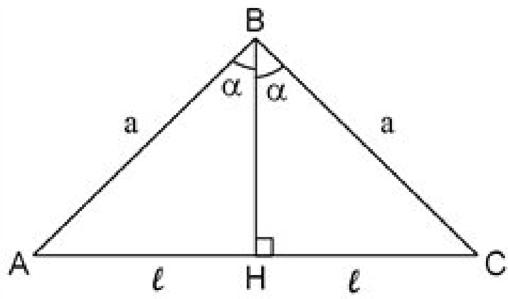
· $\triangle AMP \quad \triangle BMP$(LAL)

$\Rightarrow AP = PB$

2. **Teorema de correspondencia**

En todo triángulo isósceles la altura relativa a la base, es también una mediana y una bisectriz interior.

DEMOSTRACIÓN

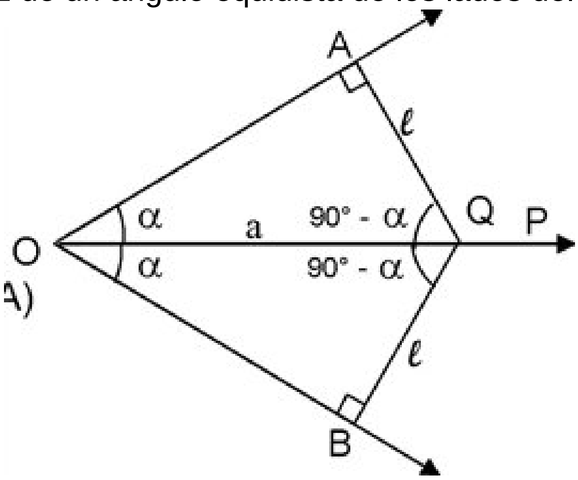


D ABC isósceles de base AC y BH altura relativa a la base ACÞPDQ BH: mediana y bisectriz interior.

$\triangle$AHB $\triangle$ CHB (congruencia LLA_M)
$\Rightarrow$ AH = HC ($\overline{BH}$ mediana) y
m$\angle$ABH = m$\angle$CBH ($\overline{BH}$ bisectriz interior)

3. **Teorema de la bisectriz**

Todo punto de una bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.



<u>DEMOSTRACIÓN</u>

$\overleftrightarrow{OP}$ bisectriz del $\angle$AOB y P $\overleftrightarrow{OP}$

$\Rightarrow$ PDQ AP = PB

O

$\triangle$OQA $\triangle$ OBQ (congruencia ALA)
$\Rightarrow$ QA = QB

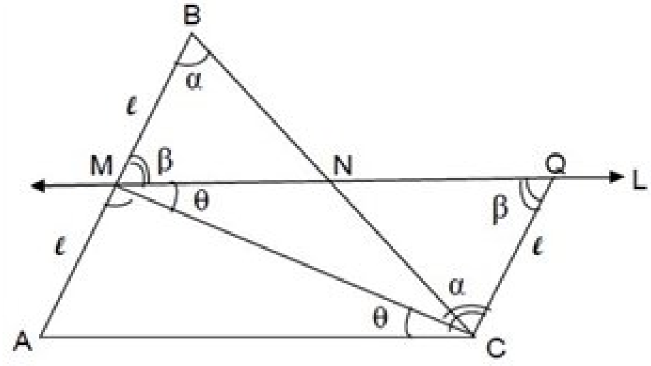
4. **Teorema de los puntos medios**

Toda recta trazada por el punto medio de un lado de un triángulo paralela a otro lado, intersecta al tercer lado en su punto medio.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>

BM = MA y L // $\overline{AC}$
$\Rightarrow$ PDQ BN = NC

· Sea $\overline{CQ}$ MB
$\Rightarrow$ m$\angle$ AMC = m$\angle$MCQ y
m$\angle$QMC = m$\angle$MCA
· Δ MAC ΔCQB (congruencia ALA)
$\Rightarrow$ AM = QC
· Δ MNB Δ QNC(congruencia ALA)
$\Rightarrow$ BN = NC



El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo se denomina base media.

5. **Teorema de la base media**

En todo triángulo una base media es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de dicho lado.

DEMOSTRACIÓN

A

$\overline{BM}$: mediana relativa a $\overline{AC}$

$\Rightarrow$ PDQ $\quad BM = \dfrac{AC}{2}$

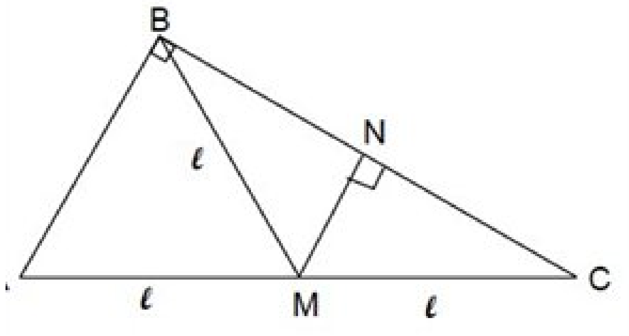
· Sea $\overline{MN}$ $\quad$ — $\quad$ AB y AM = MC

$\Rightarrow$ BN = NC

· Teorema de la Mediatriz $\quad$ A

$\Rightarrow$ BM = MC

$\Rightarrow BM = \dfrac{AC}{2}$



6. **Teorema de la menor mediana en el triángulo rectángulo**

La longitud de la mediana relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

<u>**DEMOSTRACIÓN**</u>

$\overline{BM}$: mediana relativa a $\overline{AC}$

$\Rightarrow$ PDQ $\quad BM = \dfrac{AC}{2}$

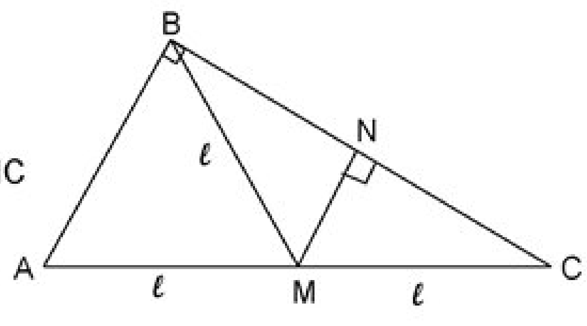
· Sea $\overline{MN}$ $\quad$ — $\quad$ AB y AM = MC

$\Rightarrow$ BN = NC

· Teorema de la Mediatriz

$\Rightarrow$ BM = MC

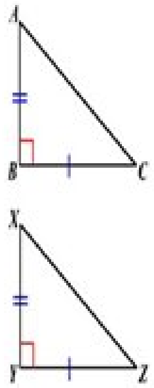
$\Rightarrow BM = \dfrac{AC}{2}$

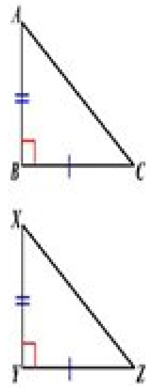


CONGRUENCIAS DE DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Congruencia Cateto-Cateto

Si los catetos de un triángulo rectángulo son congruentes a los catetos correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.





En la figura,

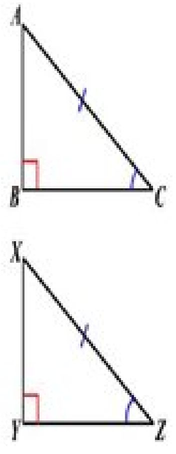
$$\overline{AB} \cong \overline{XY} \quad \text{y} \quad \overline{BC} \cong \overline{YZ}$$

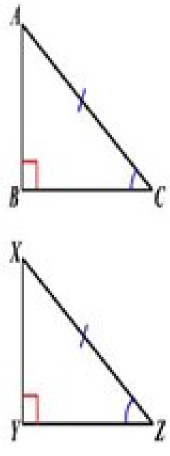
. Así,

[redacted]

Congruencia hipotenusa-ángulo

Si la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes a la hipotenusa y al ángulo agudo correspondiente de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.





En la figura,

$$\overline{AC} \cong \overline{XZ} \quad \text{y} \quad \angle C \cong \angle Z$$

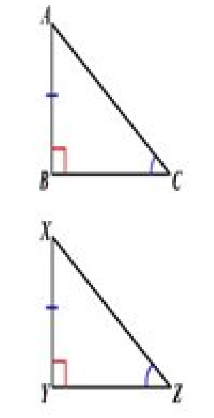
. Así,

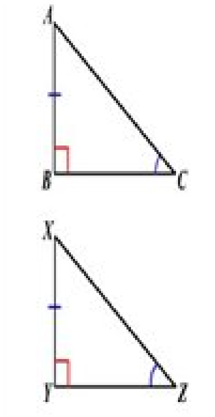
[redacted]

.

Congruencia cateto-ángulo

Si un cateto y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes a un cateto y al ángulo agudo correspondiente de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.





En la figura,

$$\overline{AB} \cong \overline{XY} \quad \text{y} \quad \angle C \cong \angle Z$$

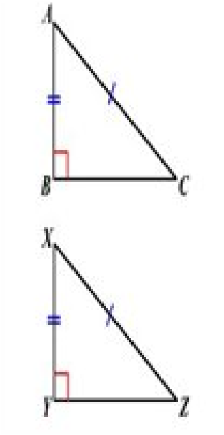
. Así,

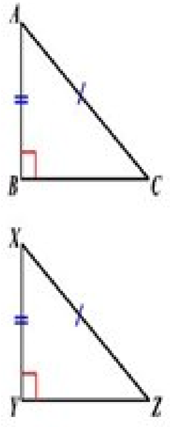
[redacted]

.

Congruencia hipotenusa-cateto

Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes a la hipotenusa y al cateto correspondiente de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.





En la figura,

$$\overline{AB} \cong \overline{XY} \quad \text{y} \quad \overline{AC} \cong \overline{XZ}$$

. Así,

[redacted]

.