El método de eliminación Gaussiana y sus aportes

El método de eliminación Gaussiana o eliminación de Gauss-Jordan resolver ecuaciones en varias variables se remonta a nuestros ancestros. El método de eliminación se conoce hace varios siglos atrás gracias a Karl Gauss y Camille Jordan en el siglo XIX.

Actualmente se utiliza este método para resolver grandes sistemas en la computadora.   La teoría de matrices fue desarrollada en 1857 por Arthur Cayley.   Utilizo los aportes de la teoría de determinantes propuesta por Seki Kowa y Leibniz y la regla de Cramer.

Los aportes de Gauss se conocían anteriormente en un importante libro matemático chino llamado Jiuzhang suanshuo Nueve capítulos del arte matemático. Además Gauss realizó una intensa investigación sobre el magnetismo. Entre sus más importantes trabajos están los de la aplicación de las matemáticas al magnetismo y a la electricidad; una unidad de inducción magnética recibe su nombre. También llevó a cabo investigaciones en el campo de la óptica, especialmente en los sistemas de lentes.

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior. Cuando se aplica este proceso, la matriz resultante se conoce como: "forma escalonada". Este método es parecido al de Gauss, solo que al igualar la diagonal principal a 1, el resto de las variables deben quedar igualadas a 0, así obtenemos los resultados directamente. Este proceso es aplicable a todos los sistemas de ecuaciones lineales que existen, no hay un valor máximo de ecuaciones que se puedan trabajar.

El algoritmo de la eliminación de Gauss – Jordan consiste en los siguientes pasos:

1. Ir a la columna no cero extrema izquierda
2. Si el primer renglón tiene un cero en esta columna, intercambiarlo con otro que no lo tenga
3. Luego, obtener ceros debajo de este elemento delantero, sumando múltiplos adecuados del renglón superior a los renglones debajo de él
4. Cubrir el renglón superior y repetir el proceso anterior con la submatriz restante. Repetir con el resto de los renglones (en este punto la matriz se encuentra en la forma de escalón)
5. Comenzando con el último renglón no cero, avanzar hacia arriba: para cada renglón obtener un 1 delantero e introducir ceros arriba de este sumando múltiplos correspondientes a los renglones correspondientes

Una variante interesante de la eliminación de Gauss es la que llamamos eliminación de Gauss-Jordan, (debido al mencionado Gauss y a Wilhelm Jordan), esta consiste en ir obteniendo los 1 delanteros durante los pasos uno al cuatro (llamados paso directo) así para cuando estos finalicen ya se obtendrá la matriz en forma escalonada reducida.

Este método, que constituye una variación del método de eliminación de Gauss, permite resolver hasta 15 o 20 ecuaciones simultáneas, con 8 o 10 dígitos significativos en las operaciones aritméticas de la computadora. Este procedimiento se distingue del método Gaussiano en que cuando se elimina una incógnita, se elimina de todas las ecuaciones restantes, es decir, las que preceden a la ecuación pivote así como de las que la siguen.

El método de Gauss-Jordan es una variante del método de Gauss. Cuando se elimina una incógnita en una ecuación, Gauss-Jordan elimina esa incógnita en el resto de las ecuaciones, tomando como base para la eliminación a la ecuación pivote. También todos los renglones se normalizan cuando se toman como ecuación pivote. El resultado final de este tipo de eliminación genera una matriz identidad en vez de una triangular como lo hace Gauss, por lo que no se usa la sustitución hacia atrás.

Ejemplo:

Desarrollar el siguiente sistema de ecuaciones:

Operaciones elementales por renglón o fila en una matriz escalonada:

- Multiplicar un renglón o fila por un numero " 0.
- Multiplicar un renglón o fila por un numero " 0 y sumarlo a otro renglón.
- Intercambiar filas.

Gauss Jordan se resuelve triangulando el sistema de ecuaciones en ambas partes de la matriz (arriba y abajo) dejando solo la diagonal.

2x + y -2z = -8
3x + 2y + z = 3
5x + 4y - 3z = -15

Se trabaja con matrices:

2 1 -2 I -8
3 2 1 I 3
5 4 -3 I -15

Por triangulación inferior queda:

2 1 -2 I -8
0 -1 -8 I -30
0 0 -20 I -80

Después se triangula arriba:

40 0 0 I 40
0 -20 0 I 40
0 0 -20 I -80

Finalmente dividiendo la primera fila por 40, la segunda por -20 y la tercera por -20 se obtiene la matriz:

1 0 0 I 1
0 1 0 I -2
0 0 1 I 4

La resolución del sistema es

x= 1
y= -2
z= 4